/

MECHANICA

TOETS 2 **17-01-2003**

1. De gravitationele potentiële (zelf-)energie van een uniforme bol met massa M en straal R, die wordt opgebouwd door steeds kleine massadeeltjes vanuit het oneindige aan de bol toe te voegen, wordt gegeven door $U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$

   Toon dit aan.

2. Het basisprobleem van de variatierekening is een functie $y(x)$ te vinden zodat de integraal $J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\}dx$ een uiterste waarde heeft.

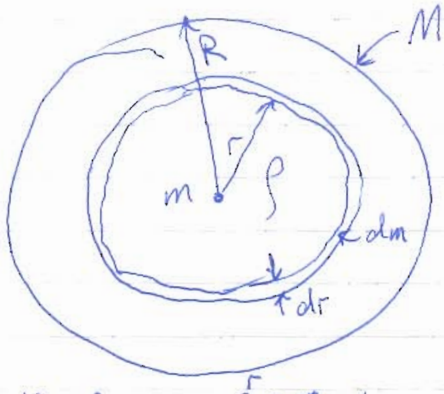
   Beschouw de functie $f = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, waarbij $y(x) = x$. Voeg aan $y(x)$ de functie $\eta(x) = \sin x$ toe, en bepaal de functie $J(\alpha)$ tussen de grenzen $x = 0$ en $x = 2\pi$.

   Toon aan dat $J(\alpha)$ een minimum heeft voor $\alpha = 0$.

3. Een massieve cilinder en een holle cilinder rollen van een schuine helling. Het traagheids-moment I van een massieve cilinder is $\frac{1}{2}mR^2$, en van een holle cilinder mR^2. De rotatie-energie kan berekend worden met $\frac{1}{2}I\omega^2$.
   De holle cilinder is langzamer dan de massieve als:
   a. $m_{hol} = m_{massief}$, waarbij m gelijk is aan de (trage) massa
   b. $R_{hol} = R_{massief}$, waarbij R de straal van de cilinder is
   c. $m_{hol} = m_{massief}$ en $R_{hol} = R_{massief}$
   d. De holle cilinder is altijd langzamer wat m en R ook zijn.
   Bespreek alle alternatieven en kies het beste antwoord.

Punten: opgave 1: 7 pt , opgave 2: 7 pt, opgave 3: 4 pt (antw. 1, uitleg 3).

1.



$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \rightarrow \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$

$dm = 4\pi\rho r^2 dr$

$F = \frac{G\,m\,dm}{x^2}$

$W = \int F\,dx$

$dU = \int F\,dx = \int_\infty^r \frac{G\,m\,dm}{x^2}\,dx = \int_\infty^r G\,m\,dm\,x^{-2}\,dx = -G\,m\,dm\,x^{-1}\Big]_\infty^r =$

$-\frac{G\,m\,dm}{x}\Big|_\infty^r = -\frac{G\,m\,dm}{r}$

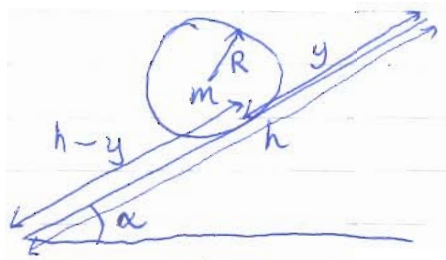
$U = \int_0^R dU = \int_0^R -\frac{G\,m\,dm}{r} = \int_0^R -\frac{G\frac{4}{3}\pi\rho r^3\,4\pi\rho r^2\,dr}{r} = \int_0^R -\frac{G\,16\pi^2\rho^2 r^4}{3}\,dr =$

7

$\int_0^R -\frac{16}{3}G\pi^2\rho^2 r^4\,dr = -\frac{16}{15}G\pi^2\rho^2 r^5\Big]_0^R = -\frac{16}{15}G\pi^2\rho^2 R^5 = -\frac{16}{15}G\pi^2\left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^2 R^5 =$

$-\frac{16}{15}G\pi^2\frac{M^2}{\frac{16}{9}\pi^2 R^6}R^5 = -\frac{9}{15}\frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$

3. (zie verderop voor 2.)



$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

$U = mg(h-y)\sin\alpha$

$y = R\theta \rightarrow \dot{y} = R\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R}$

$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg(h-y)\sin\alpha$

$= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\dot{y}^2 - mg(h-y)\sin\alpha$

$= \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\right)\dot{y}^2 - mg(h-y)\sin\alpha$

$\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = mg\sin\alpha$

4

$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\dot{y}$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{y}$

$mg\sin\alpha + \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} = 0$

$\ddot{y} = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{I}{R^2}} \rightarrow \dot{y} = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{I}{R^2}}t$

$\dot{y}_m = \frac{m_m g\sin\alpha}{m_m + \frac{1}{2}m_m} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$

$\dot{y}_h = \frac{m_h g\sin\alpha}{m_h + m_h} = \frac{1}{2}g\sin\alpha$

$\frac{2}{3} > \frac{1}{2} \rightarrow \dot{y}_m > \dot{y}_h$

Deze hangen niet van m of R af dus (d) is het juiste antwoord.

2. $f = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$y(x, \alpha) = x + \alpha \sin x$

2 $y'(x, \alpha) = \frac{dy}{dx} = 1 + \alpha \cos x$

$f = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 + \alpha \cos x)^2 = 1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x$

1 $J = \int_0^{2\pi} (1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x)\, dx$